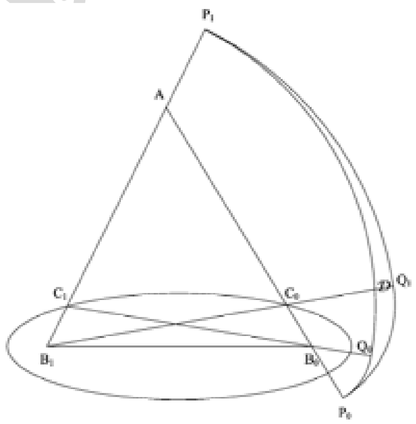
2006 年全国高中数学联合竞赛

加试试题参考答案

一、（本题满分 50 分）以 B_0 和 B_1 为焦点的椭圆与 $\triangle AB_0B_1$ 的边 AB_i 交于 C_i （$i=0,1$）．在 AB_0 的延长线上任取点 P_0，以 B_0 为圆心，B_0P_0 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 交 C_1B_0 的延长线于 Q_0；以 C_1 为圆心，C_1Q_0 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_0P_1}$ 交 B_1A 的延长线于 P_1；以 B_1 为圆心，B_1P_1 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_1Q_1}$ 交 B_1C_0 的延长线于 Q_1；以 C_0 为圆心，C_0Q_1 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_1P_0'}$，交 AB_0 的延长线于 P_0'．试证：



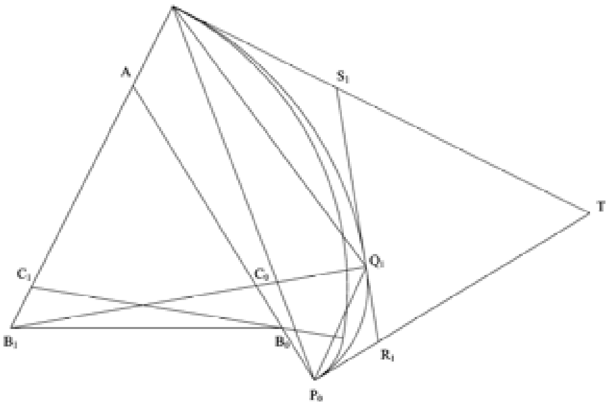
（1） 点 P_0' 与点 P_0 重合，且圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 与 $\overset{\frown}{P_0Q_1}$ 相内切于 P_0；

（2） 四点 P_0,Q_0,Q_1,P_1 共圆.

【证明】（1）显然 $B_0P_0=B_0Q_0$，并由圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 和 $\overset{\frown}{Q_0P_1}$，$\overset{\frown}{Q_0P_1}$ 和 $\overset{\frown}{P_1Q_1}$，$\overset{\frown}{P_1Q_1}$ 和 $\overset{\frown}{Q_1P_0'}$ 分别相内切于点 Q_0,P_1,Q_1，得 $C_1B_0+B_0Q_0=C_1P_1$，$B_1C_1+C_1P_1=B_1C_0+C_0Q_1$ 以及 $C_0Q_1=C_0B_0+B_0P_0'$．四式相加，利用 $B_1C_1+C_1B_0=B_1C_0+C_0B_0$ 以及 P_0' 在 B_0P_0 或其延长线上，有 $B_0P_0=B_0P_0'$.

从而可知点 P_0' 与点 P_0 重合。由于圆弧 $\overset{\frown}{Q_1P_0}$ 的圆心 C_0，圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 的圆心 B_0 以及 P_0 在同一直线上，所以圆弧 $\overset{\frown}{Q_1P_0}$ 和 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 相内切于点 P_0.

（2）现在分别过点 P_0 和 P_1 引上述相应相切圆弧的公切线 P_0T 和 P_1T 交于点 T.又过点 Q_1 引相应相切圆弧的公切线 R_1S_1，分别交 P_0T 和 P_1T 于点 R_1 和 S_1.连接 P_0Q_1 和 P_1Q_1，得等腰三角形 $P_0Q_1R_1$ 和 $P_1Q_1S_1$．基于此，我们可由



$$
\begin{aligned}
\angle P_0Q_1P_1 &= \pi-\angle P_0Q_1R_1-\angle P_1Q_1S_1 \\
&= \pi-\left(\angle P_1P_0T-\angle Q_1P_0P_1\right)-\left(\angle P_0P_1T-\angle Q_1P_1P_0\right)
\end{aligned}
$$

而 $\pi - \angle P_0Q_1P_1 = \angle Q_1P_0P_1 + \angle Q_1P_1P_0$，代入上式后，即得

$$\angle P_0Q_1P_1 = \pi - \frac{1}{2}\left(\angle P_1P_0T + \angle P_0P_1T\right).$$

同理可得 $\angle P_0Q_0P_1 = \pi - \frac{1}{2}\left(\angle P_1P_0T + \angle P_0P_1T\right)$.所以四点 P_0, Q_0, Q_1, P_1 共圆.

二、（本题满分 50 分）已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0 = x, a_1 = y$，$a_{n+1} = \dfrac{a_n a_{n-1} + 1}{a_n + a_{n-1}}$，$n = 1, 2, \cdots$.

1) 对于怎样的实数 x 与 y，总存在正整数 n_0，使当 $n \ge n_0$ 时 a_n 恒为常数？

2) 求通项 a_n.

【解】1) 我们有

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n a_{n-1} + 1}{a_n + a_{n-1}} = \frac{a_n^2 - 1}{a_n + a_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2.1}$$

所以，如果对某个正整数 n，有 $a_{n+1} = a_n$，则必有 $a_n^2 = 1$，且 $a_n + a_{n-1} \ne 0$.

如果该 $n = 1$，我们得

$$|y| = 1 \quad 且 \quad x \ne -y. \tag{2.2}$$

如果该 $n > 1$，我们有

$$a_n - 1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} + 1}{a_{n-1} + a_{n-2}} - 1 = \frac{(a_{n-1} - 1)(a_{n-2} - 1)}{a_{n-1} + a_{n-2}}, \qquad n \ge 2 \tag{2.3}$$

和

$$a_n + 1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} + 1}{a_{n-1} + a_{n-2}} + 1 = \frac{(a_{n-1} + 1)(a_{n-2} + 1)}{a_{n-1} + a_{n-2}}, \qquad n \ge 2. \tag{2.4}$$

将式（2.3）和（2.4）两端相乘，得

$$a_n^2 - 1 = \frac{a_{n-1}^2 - 1}{a_{n-1} + a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}^2 - 1}{a_{n-1} + a_{n-2}}, \qquad n \ge 2. \tag{2.5}$$

由（2.5）递推，必有（2.2）或

$$|x| = 1 \quad 且 \quad y \ne -x. \tag{2.6}$$

反之，如果条件（2.2）或（2.6）满足，则当 $n \ge 2$ 时，必有 $a_n =$ 常数，且常数是 1 或－1.

2）由（2.3）和（2.4），我们得到

$$\frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \frac{a_{n-1} - 1}{a_{n-1} + 1} \cdot \frac{a_{n-2} - 1}{a_{n-2} + 1}, \qquad n \ge 2. \tag{2.7}$$

记 $b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$，则当 $n\geq 2$ 时，

$$b_n=b_{n-1}b_{n-2}=(b_{n-2}b_{n-3})b_{n-2}=b_{n-2}^2b_{n-3}=(b_{n-3}b_{n-4})^2b_{n-3}=b_{n-3}^3b_{n-4}^2=\cdots$$

由此递推，我们得到

$$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{F_{n-1}}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{F_{n-2}},\qquad n\geq 2, \tag{2.8}$$

这里

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}，\ n\geq 2，\quad F_0=F_1=1. \tag{2.9}$$

由（2.9）解得

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \tag{2.10}$$

上式中的 n 还可以向负向延伸，例如

$$F_{-1}=0,F_{-2}=1.$$

这样一来，式（2.8）对所有的 $n\geq 0$ 都成立.由（2.8）解得

$$a_n=\frac{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}+(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}}{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}-(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}}，\ n\geq 0. \tag{2.11}$$

式（2.11）中的 F_{n-1},F_{n-2} 由（2.10）确定.

三、 （本题满分 50 分）解方程组

$$\begin{cases}x-y+z-w=2,\\ x^2-y^2+z^2-w^2=6,\\ x^3-y^3+z^3-w^3=20,\\ x^4-y^4+z^4-w^4=66.\end{cases}$$

【解】 令 $p=x+z,q=xz$, 我们有

$$\begin{aligned}p^2&=x^2+z^2+2q,\\ p^3&=x^3+z^3+3pq,\\ p^4&=x^4+z^4+4p^2q-2q^2,\end{aligned}$$

同样，令 $s=y+w,t=yw$, 有

$$\begin{aligned}s^2&=y^2+w^2+2t,\\ s^3&=y^3+w^3+3st,\\ s^4&=y^4+w^4+4s^2t-2t^2.\end{aligned}$$

在此记号系统下，原方程组的第一个方程为

$$p=s+2. \tag{3.1}$$

于是

$$p^2 = s^2 + 4s + 4,$$
$$p^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8,$$
$$p^4 = s^4 + 8s^3 + 24s + 32s + 16,$$

现在将上面准备的 p^2, p^3, p^4 和 s^2, s^3, s^4 的表达式代入，得

$$x^2 + z^2 + 2q = y^2 + w^2 + 2t + 4s + 4,$$
$$x^3 + z^3 + 3pq = y^3 + w^3 + 3st + 6s^2 + 12s + 8,$$
$$x^4 + z^4 + 4p^2q - 2q^2 = y^4 + w^4 + 4s^2t - 2t^2 + 8s^3 + 24s + 32s + 16,$$

利用原方程组的第二至四式化简，得

$$q = t + 2s - 1, \tag{3.2}$$
$$pq = st + 2s^2 + 4s - 4, \tag{3.3}$$
$$2p^2q - q^2 = 2s^2t - t^2 + 4s^3 + 12s^2 + 16s - 25, \tag{3.4}$$

将（3.1）和（3.2）代入（3.3），得

$$t = \frac{s}{2} - 1. \tag{3.5}$$

将（3.5）代入（3.2），得

$$q = \frac{5}{2}s - 2. \tag{3.6}$$

将（3.1）（3.5）（3.6）代入（3.4），得 $s = 2$. 所以有 $t = 0, p = 4, q = 3$.

这样一来，x, z 和 y, w 分别是方程 $X^2 - 4X + 3 = 0$ 和 $Y^2 - 2Y = 0$ 的两根，即

$$\begin{cases} x = 3, \\ z = 1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 1, \\ z = 3 \end{cases}$$

且

$$\begin{cases} y = 2, \\ w = 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} y = 0, \\ w = 2. \end{cases}$$

详言之，方程组有如下四组解：$x = 3, y = 2, z = 1, w = 0$；或 $x = 3, y = 0, z = 1, w = 2$；

或 $x = 1, y = 2, z = 3, w = 0$；或 $x = 1, y = 0, z = 3, w = 2$.

注：如果只得到一组解，或者不完整，最多得 40 分。

关于加试试题的背景说明可陆续见王兴华教授 http://wangxinghua.name 和浙江省数学会网站 http://www.zjms.org . 有兴趣的同志敬请关注。