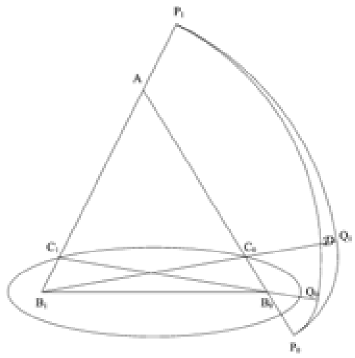
2006 年全国高中数学联合竞赛加试试卷

（考试时间： 上午 10：00 — 12：00）

一、以 B_0 和 B_1 为焦点的椭圆与△ AB_0B_1 的边 AB_i 交于 C_i （$i=0,1$）．在 AB_0 的延长线上任取点 P_0，以 B_0 为圆心，B_0P_0 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 交 C_1B_0 的延长线于 Q_0；以 C_1 为圆心，C_1Q_0 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_0P_1}$ 交 B_1A 的延长线于 P_1；以 B_1 为圆心，B_1P_1 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_1Q_1}$ 交 B_1C_0 的延长线于 Q_1；以 C_0 为圆心，C_0Q_1 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_1P_0'}$，交 AB_0 的延长线于 P_0'．试证：



（1） 点 P_0' 与点 P_0 重合，且圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 与 $\overset{\frown}{P_0Q_1}$ 相内切于 P_0；

（2） 四点 P_0,Q_0,Q_1,P_1 共圆。

二、已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=x, a_1=y$，$a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}$，$n=1,2,\cdots$.

（1） 对于怎样的实数 x 与 y，总存在正整数 n_0，使当 $n\geq n_0$ 时 a_n 恒为常数？

（2） 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

三、解方程组

$$\begin{cases} x-y+z-w=2, \\ x^2-y^2+z^2-w^2=6, \\ x^3-y^3+z^3-w^3=20, \\ x^4-y^4+z^4-w^4=66. \end{cases}$$