市： 学校： 年级： 姓名： 准考证号：

装 订 线

2014 全国高中数学联赛安徽省初赛试卷

（考试时间：2014 年 7 月 5 日上午 9:00—11:30）

题号	一	二				总分
		9	10	11	12	
得分						
评卷人 复核人						

注意： 1．本试卷共 12 小题，满分 150 分； 2．请用钢笔、签字笔或圆珠笔作答；
3．书写不要超过装订线； 4．不得使用计算器.

一、填空题（每题 8 分，共 64 分）

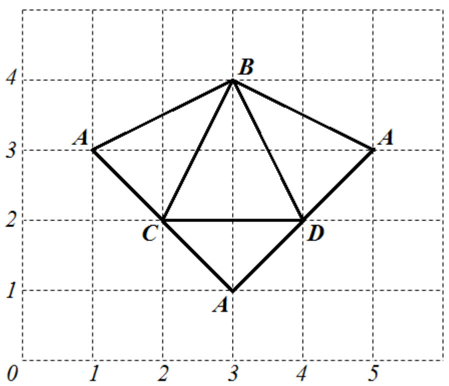
1. 函数 $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+4x+5}\ (x\in\mathbf{R})$ 的值域是__________.

2. 函数 $y=\tan(2013x)-\tan(2014x)+\tan(2015x)$ 在 $[0,\pi]$ 中的零点个数是__________.

3. 设定点 $A(2,1)$，动点 B 在 x 轴上，动点 C 在直线 $y=x$ 上，则 ΔABC 的周长的最小值是__________.

4. 设 P_1,P_2 是平面上两点，P_{2k+1} 是 P_{2k} 关于 P_1 的对称点，P_{2k+2} 是 P_{2k+1} 关于 P_2 的对称点，$k\in\mathbf{N}^*$．若 $|P_1P_2|=1$，则 $|P_{2013}P_{2014}|=$__________.

5. 已知四面体 $ABCD$ 的侧面展开图如下图所示，则其体积是__________.



6. 设复数 z 满足 $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|\le 2$，则 $|z|$ 的取值范围是__________.

7. 设动点 $P(t,0),Q(1,t)$，其中参数 $t\in[0,1]$，则线段 PQ 扫过的平面区域的面积是__________.

8. 从正 12 边形的顶点中取出 4 个顶点，它们两两不相邻的概率是__________.

二、解答题（第 9—10 题每题 21 分，第 11—12 题 22 分，共 86 分）

9. 已知正实数x,y,z满足$x+y+z=1$．求证：$\dfrac{z-y}{x+2y}+\dfrac{x-z}{y+2z}+\dfrac{y-x}{z+2x}\geq 0$．

10. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+3}{2a_n},\ n\geq 1$．求证：

（1） 当$n\geq 2$时，a_n严格单调递减.

（2） 当$n\geq 1$时，$\left|a_{n+1}-\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}\dfrac{r^{2^n}}{1-r^{2^n}}$，这里$r=2-\sqrt{3}$．

11. 已知平面凸四边形 $ABCD$ 的面积为 1．求证：

$$|AB|+|AC|+|AD|+|BC|+|BD|+|CD| \geq 4+2\sqrt{2}.$$

12. 求证 （1）方程 $x^3-x-1=0$ 恰有一个实根 ω，并且 ω 是无理数；

（2）ω 不是任何整数系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbf{Z},a\neq 0)$ 的根.

填空题答案

① $[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$　　②2014　　③$\sqrt{10}$　　④4024　　⑤$\frac{2}{3}$

⑥$[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$　　⑦$\frac{1}{6}$　　⑧$\frac{7}{33}$

填空题解答

1．$y=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+4x+5}\Leftrightarrow$关于$x$的方程$(y-1)x^2+(4y-2)x+(5y-3)=0$有实根

$\Leftrightarrow (2y-1)^2-(y-1)(5y-3)\ge 0$，化简得$y^2-4y+2\le 0$，$2-\sqrt{2}\le y\le 2+\sqrt{2}$.

2．$y=\tan(2013x)-\tan(2014x)+\tan(2015x)$

$$=\frac{\sin(2013x)\cos(2015x)+\cos(2013x)\sin(2015x)}{\cos(2013x)\cos(2015x)}-\frac{\sin(2014x)}{\cos(2014x)}$$
$$=\frac{\sin(4028x)}{\cos(2013x)\cos(2015x)}-\frac{\sin(2014x)}{\cos(2014x)}$$
$$=\frac{2\sin(2014x)\cos(2014x)}{\cos(2013x)\cos(2015x)}-\frac{\sin(2014x)}{\cos(2014x)}$$
$$=\frac{\sin(2014x)[2\cos^2(2014x)-\cos(2013x)\cos(2015x)]}{\cos(2013x)\cos(2014x)\cos(2015x)}$$
$$=\frac{\sin(2014x)[1+\cos(4028x)-\cos(2013x)\cos(2015x)]}{\cos(2013x)\cos(2014x)\cos(2015x)}$$
$$=\frac{\sin(2014x)[1-\sin(2013x)\sin(2015x)]}{\cos(2013x)\cos(2014x)\cos(2015x)}$$

由y的定义域可知$\sin(2013x)\sin(2015x)\ne 1$，因此$y$的零点为

$x=\dfrac{k\pi}{2014}, k=0,1,\cdots,2014.$。但当 k=1007 时函数无定义，因此 y 在$[0,\pi]$中共有 2014 个零点.

3．设$P(2,-1)$是A关于x轴的对称点，$Q(1,2)$是A关于直线$y=x$的对称点，则ΔABC的周长等于$PB+BC+CQ\ge PQ=\sqrt{10}$.

4．$\begin{cases} P_{2k+1} = 2P_1 - P_{2k} \\ P_{2k+2} = 2P_2 - P_{2k+1} \end{cases} \Rightarrow P_{2k+2} = 2(P_2 - P_1) + P_{2k} \Rightarrow \begin{cases} P_{2k+2} = 2k(P_2 - P_1) + P_2 \\ P_{2k+1} = 2k(P_1 - P_2) + P_2 \end{cases}$.

从而，$\overrightarrow{P_{2k+1}P_{2k+2}} = 4k\overrightarrow{P_1P_2}$．特别，$\left|P_{2013}P_{2014}\right| = 4024$.

5．以图示坐标系为 Oxy 平面，建立空间直角坐标系．根据展开图及其对称性，可设

$A(3,y,z)$，$B(3,4,0)$，$C(2,2,0)$，$D(4,2,0)$.

由$\begin{cases} \sqrt{5} = \left|AB\right| = \sqrt{(y-4)^2 + z^2} \\ \sqrt{2} = \left|AC\right| = \sqrt{1+(y-2)^2 + z^2} \end{cases}$，解得$\begin{cases} y = 2 \\ z = \pm 1 \end{cases}$．因此，$V_{ABCD} = \dfrac{S_{BCD} \cdot |z|}{3} = \dfrac{2}{3}$.

6．设$|z| = r$，则有$\left|1-r^2\right| \le \left|1+z^2\right| \le 2r$，即$(1-r^2)^2 \le 4r^2$.

由此解得$3-2\sqrt{2} \le r^2 \le 3+2\sqrt{2}$，$\sqrt{2}-1 \le r \le \sqrt{2}+1$.

7．直线 PQ 的方程为 $y = \dfrac{t}{1-t}(x-t)$．固定 $x \in [0,1]$，当 $t \in [0,x]$ 变化时，

$y = 2 - x - \left(\dfrac{1-x}{1-t} + 1 - t\right)$的取值范围是$0 \le y \le 2 - x - 2\sqrt{1-x}$.

所求平面区域的面积$= \int_0^1 \left(2 - x - 2\sqrt{1-x}\right)dx = \dfrac{1}{6}$.

8．从 12 个顶点中取出 4 个顶点的取法总数为 C_{12}^4．把正 12 边形的顶点依次编号 1~12，

设被取出的 4 个顶点的编号从小到大为 a,b,c,d．若它们两两不相邻，则有

$$x = b - a - 2 \ge 0,\ y = c - b - 2 \ge 0,\ z = d - c - 2 \ge 0$$

当 $a = 1$ 时，满足 $d \le 11$ 即 $x + y + z \le 4$ 的 (x,y,z) 共有 $C_7^3 = 15$ 个；

当 $a \ge 2$ 时，满足 $d \le 12$ 即 $x + y + z \le 6 - a$ 的 (x,y,z) 共有 C_{9-a}^3 个.

因此，两两不相邻的概率为 $\dfrac{C_7^3 + C_7^3 + C_6^3 + C_5^3 + C_4^3 + C_3^3}{C_{12}^4} = \dfrac{105}{495} = \dfrac{7}{33}$.

9-12 题解答

9．根据均值（或柯西）不等式

$$((x+2y)+(y+2z)+(z+2x))\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right)$$

$$\geq 9\cdot\sqrt[3]{(x+2y)(y+2z)(z+2x)}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x+2y}\frac{1}{y+2z}\frac{1}{z+2x}}=9$$ -----10 分

从而

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right)\geq 3.$$ -----15 分

因此

$$\frac{z-y}{x+2y}+\frac{x-z}{y+2z}+\frac{y-x}{z+2x}=\frac{x+y+z}{x+2y}+\frac{x+y+z}{y+2z}+\frac{x+y+z}{z+2x}-3\geq 0..$$ -----21 分

（注：本题条件$x+y+z=1$是多余的）。

10．（1）当$n\geq 2$时，根据平均不等式，$a_n=\dfrac{a_{n-1}^2+3}{2a_{n-1}}\geq\sqrt{3}$． -----5 分

由于a_n都是有理数，故$a_n>\sqrt{3}$．

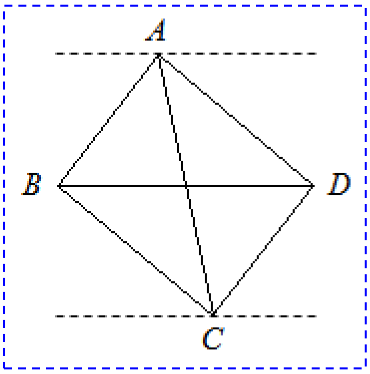
从而$a_{n+1}-a_n=\dfrac{3-a_n^2}{2a_n}<0$，即$a_n$严格单调递减． -----10 分

（2）由$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+3}{2a_n}$可得$\dfrac{a_{n+1}-\sqrt{3}}{a_{n+1}+\sqrt{3}}=\left(\dfrac{a_n-\sqrt{3}}{a_n+\sqrt{3}}\right)^2$． -----16 分

由此得$\dfrac{a_{n+1}-\sqrt{3}}{a_{n+1}+\sqrt{3}}=r^{2^n}$，其中$r=\left|\dfrac{a_1-\sqrt{3}}{a_1+\sqrt{3}}\right|=2-\sqrt{3}$．

解得$a_{n+1}=\sqrt{3}\dfrac{1+r^{2^n}}{1-r^{2^n}}$，$\left|a_{n+1}-\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}\dfrac{r^{2^n}}{1-r^{2^n}}$． -----21 分

11．假设凸四边形 $ABCD$ 满足 $L=|AB|+|AC|+|AD|+|BC|+|BD|+|CD|$ 最小．此时 $ABCD$ 一定是菱形，否则如图所示，可固定两对角点（不妨设是 B,D），过 A,C 分别做 BD 的平行线，调整另外两点 A,C 的位置，使它们分别位于两平行线上，则 ΔABD 和 ΔCBD 的面积都不变，但 L 变大．从而 AB=AD, BC=CD.类似地，AB=BC, CD=DA.　即 ABCD 是菱形-----12 分



设菱形 $ABCD$ 的两条对角线长度分别是 x,y，则 $xy=2$，$L=x+y+2\sqrt{x^2+y^2}$．根据平均不等式，$L=x+y+2\sqrt{x^2+y^2}\geq 2\sqrt{xy}+2\sqrt{2xy}=4+2\sqrt{2}$.

当 $x=y=\sqrt{2}$ 时，L 取得最小值 $4+2\sqrt{2}$.　　　　-----22 分

12.（1）设 $f(x)=x^3-x-1$，则 $f'(x)=3x^2-1$．$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 单调增，在 $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 处取得极大值 $\frac{2}{3\sqrt{3}}-1<0$，在 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 单调减，在 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 处取得极小值 $-\frac{2}{3\sqrt{3}}-1<0$，在 $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 单调增．再由 $f(1)=-1<0,\ f(2)=5>0$ 知，

方程 $f(x)=0$ 有唯一的实根 $\omega\in(1,2)$.　　　　-----8 分

假设 $\omega=\frac{m}{n}$，其中 m,n 是互素的正整数，则 $m^3=n^2(m+n)\Rightarrow n^2\mid m^3\Rightarrow n=1$，即 ω 是整数，这与 $\omega\in(1,2)$ 矛盾．因此，ω 是无理数．　　　　-----13 分

（2）假设 ω 还满足 $a\omega^2+b\omega+c=0$ $(a,b,c\in\mathbf{Z},a\neq 0)$，则有

$\begin{cases} a\omega^2+b\omega+c=0 & (1) \\ \omega^3-\omega-1=0 & (2) \end{cases}$. 将第（1）式乘 ω 减去第（2）式乘 a 得

$\begin{cases} a\omega^2+b\omega+c=0 & (3) \\ b\omega^2+(a+c)\omega+a=0 & (4) \end{cases}$.将第（4）式乘 a 减去第（3）式乘 b 得

$(a^2+ac-b^2)\omega+(a^2-bc)=0$. 由于 ω 为无理数，故

$$\begin{cases} a^2 + ac - b^2 = 0 \\ a^2 - bc = 0 \end{cases}$$

由 $a \neq 0$ 知 $bc \neq 0$．把 $b = \dfrac{a^2}{c}$ 代入 $a^2 + ac - b^2 = 0$，得 $\dfrac{a^3}{c^3} = \dfrac{a}{c} + 1$，从而 $\omega = \dfrac{a}{c}$，

这与 ω 是无理数矛盾.　　　　　　　　　　　　　　　　　　-----22 分