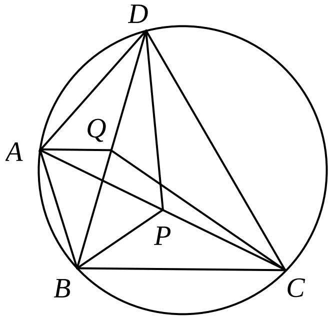
2011 年全国高中数学联合竞赛加试试题（A 卷）

考试时间：2011 年 10 月 16 日　9：40—12：10

一、（本题满分 40 分）如图，$P,\ Q$ 分别是圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC,\ BD$ 的中点．若 $\angle BPA = \angle DPA$，证明：$\angle AQB = \angle CQB$．



二、（本题满分 40 分）证明：对任意整数 $n \geq 4$，存在一个 n 次多项式

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

具有如下性质：

（1） $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 均为正整数；

（2）对任意正整数 m，及任意 k $(k \geq 2)$ 个互不相同的正整数 $r_1, r_2, \cdots, r_k$，均有

$$f(m) \neq f(r_1) f(r_2) \cdots f(r_k).$$

三、（本题满分 50 分）设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geq 4)$ 是给定的正实数，$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$．对任意正实数 r，满足 $\dfrac{a_j - a_i}{a_k - a_j} = r$ $(1 \leq i < j < k \leq n)$ 的三元数组 (i, j, k) 的个数记为 $f_n(r)$．

证明：$f_n(r) < \dfrac{n^2}{4}$．

四、（本题满分 50 分）设 A 是一个 3×9 的方格表，在每一个小方格内各填一个正整数．称 A 中的一个 $m \times n$ $(1 \leq m \leq 3,\ 1 \leq n \leq 9)$ 方格表为“好矩形”，若它的所有数的和为 10 的倍数．称 A 中的一个 1×1 的小方格为“坏格”，若它不包含于任何一个“好矩形”．求 A 中“坏格”个数的最大值．