2007 年全国高中数学联合竞赛一试

试题参考答案及评分标准

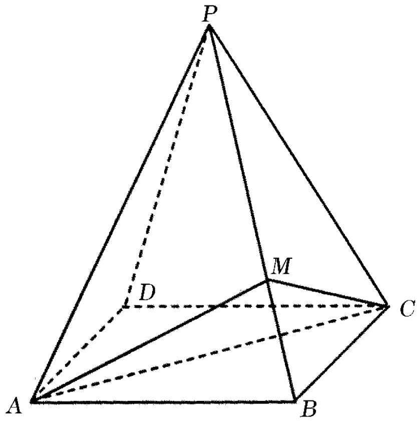
说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准.选择题只设 6 分和 0 分两档，填空题只设 9 分和 0 分两档；其它各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参照本评分标准适当划分档次评分，解答题中 5 分为一个档次，不要再增加其他中间档次.

一、选择题(本题满分 36 分，每小题 6 分)

1. 如图，在正四棱锥 P—$ABCD$ 中，$\angle APC=60°$，则二面角 A-PB-C 的平面角的余弦值为（ B ）



A. $\frac{1}{7}$　　B. $-\frac{1}{7}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

［解］ 如图，在侧面 PAB 内，作 $AM\perp PB$，垂足为 M.连结 CM，AC，则$\angle AMC$ 为二面角 A-PB-C 的平面角.不妨设 $AB=2$，则 $PA=AC=2\sqrt{2}$，斜高为$\sqrt{7}$，故 $2\times\sqrt{7}=AM\cdot 2\sqrt{2}$，由此得 $CM=AM=\sqrt{\frac{7}{2}}$.在$\triangle AMC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle AMC=\frac{AM^2+CM^2-AC^2}{2\cdot AM\cdot CM}=-\frac{1}{7}$.

2. 设实数 a 使得不等式 $|2x-a|+|3x-2a|\geqslant a^2$ 对任意实数 x 恒成立，则满足条件的 a 所组成的集合是（ A ）

A. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　　C. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-3,3\right]$

［解］ 令 $x=\frac{2}{3}a$，则有 $|a|\leqslant\frac{1}{3}$，排除(B)、(D). 由对称性排除(C). 从而只有(A)正确.

一般地，对 $k\in\mathbf{R}$，令 $x=\frac{1}{2}ka$，则原不等式为

$$|a|\cdot|k-1|+\frac{3}{2}|a|\cdot|k-\frac{4}{3}|\geqslant|a|^2,$$

由此易知原不等式等价于 $|a|\leqslant|k-1|+\frac{3}{2}|k-\frac{4}{3}|$，对任意的 $k\in\mathbf{R}$ 成立.由于

$$|k-1|+\frac{3}{2}|k-\frac{4}{3}|=\begin{cases}\frac{5}{2}k-3, & k\geqslant\frac{4}{3},\\ 1-\frac{1}{2}k, & 1\leqslant k<\frac{4}{3},\\ 3-\frac{5}{2}k, & k<1,\end{cases}$$

所以，$\min\limits_{k\in\mathbf{R}}\left\{|k-1|+\frac{3}{2}|k-\frac{4}{3}|\right\}=\frac{1}{3}$，从而上述不等式等价于 $|a|\leqslant\frac{1}{3}$.

3. 将号码分别为 1,2,…,9 的九个小球放入一个袋中，这些小球仅号码不同，其余完全相同. 甲从袋中摸出一个球，其号码为 a，放回后，乙从此袋中再摸出一个球，其号码为 b. 则使不等式 $a-2b+10>0$ 成立的事件发生的概率等于（ D ）

A. $\frac{52}{81}$　　B. $\frac{59}{81}$　　C. $\frac{60}{81}$　　D. $\frac{61}{81}$

[解]　甲、乙二人每人摸出一个小球都有 9 种不同结果，故基本事件总数为 $9^2=81$ 个. 由不等式 $a-2b+10>0$ 得 $2b<a+10$. 于是，当 $b=1,2,3,4,5$ 时，每种情形 a 可取 $1,2,\cdots,9$ 中每一个值，使不等式成立，则共有 $9\times5=45$ 种；当 $b=6$ 时，a 可取 $3,4,\cdots,9$ 中每一个值，有 7 种；当 $b=7$ 时，a 可取 5,6,7,8,9 中每一个值，有 5 种；当 $b=8$ 时，a 可取 7，8，9 中每一个值，有 3 种；当 $b=9$ 时，a 只能取 9，有 1 种. 于是，所求事件的概率为 $\dfrac{45+7+5+3+1}{81}=\dfrac{61}{81}$.

4. 设函数 $f(x)=3\sin x+2\cos x+1$. 若实数 a,b,c 使得 $af(x)+bf(x-c)=1$ 对任意实数 x 恒成立，则 $\dfrac{b\cos c}{a}$ 的值等于　　　　（　C　）

A. $-\dfrac{1}{2}$　　　　B. $\dfrac{1}{2}$　　　　C.　-1　　　　D.　1

[解]　令 $c=\pi$，则对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)+f(x-c)=2$，于是取 $a=b=\dfrac{1}{2}$，$c=\pi$，则对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$af(x)+bf(x-c)=1$，由此得 $\dfrac{b\cos c}{a}=-1$.

更一般地，由题设可得

$$f(x)=\sqrt{13}\sin(x+\varphi)+1,\ f(x-c)=\sqrt{13}\sin(x+\varphi-c)+1,$$

其中 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $\tan\varphi=\dfrac{2}{3}$. 于是，$af(x)+bf(x-c)=1$ 可化为

$$\sqrt{13}a\sin(x+\varphi)+\sqrt{13}b\sin(x+\varphi-c)+a+b=1,$$

即 $\sqrt{13}a\sin(x+\varphi)+\sqrt{13}b\sin(x+\varphi)\cos c-\sqrt{13}b\cos(x+\varphi)\sin c+(a+b-1)=0$,

所以，$\sqrt{13}(a+b\cos c)\sin(x+\varphi)-\sqrt{13}b\sin c\cos(x+\varphi)+(a+b-1)=0$.

由已知条件，上式对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，故必有

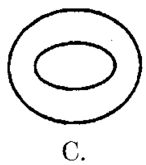
$$\begin{cases}a+b\cos c=0, & (1)\\ b\sin c=0, & (2)\\ a+b-1=0. & (3)\end{cases}$$

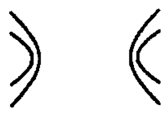
若 $b=0$，则由(1)知 $a=0$，显然不满足(3)式. 故 $b\neq0$. 所以，由(2)知 $\sin c=0$，故 $c=2k\pi+\pi$ 或 $c=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 当 $c=2k\pi$ 时，$\cos c=1$ 则(1)，(3)两式矛盾. 故 $c=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})\cos c=-1$. 由(1)，(3)知 $a=b=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{b\cos c}{a}=-1$.

5. 设圆 O_1 和圆 O_2 是两个定圆，动圆 P 与这两个定圆都相切，则圆 P 的圆心轨迹不可能是（　A　）


A.


B.


C.


D.

[解]　设圆 O_1 和圆 O_2 的半径分别是 r_1,r_2，$|O_1O_2|=2c$，则一般地，圆 P 的圆心轨迹是焦点为 O_1,O_2，且离心率分别是 $\dfrac{2c}{r_1+r_2}$ 和 $\dfrac{2c}{|r_1-r_2|}$ 的圆锥曲线（当 $r_1=r_2$ 时，O_1O_2 的中垂线是轨迹的一部份，当 $c=0$ 时，轨迹是两个同心圆.）

当 $r_1=r_2$ 且 $r_1+r_2<2c$ 时，圆 P 的圆心轨迹如选项 B；当 $0<2c<|r_1-r_2|$ 时，圆 P 的圆心轨迹如选项 C；当 $r_1\neq r_2$ 且 $r_1+r_2<2c$ 时，圆 P 的圆心轨迹如选项 D. 由于选项 A 中的椭圆和双曲线的焦点不重合，因而圆 P 的圆心轨迹不可能是选项 A.

6. 已知 A 与 B 是集合$\{1,2,3,\cdots,100\}$的两个子集，满足：A 与 B 的元素个数相同，且 $A\cap B$ 为空集. 若 $n\in A$ 时总有 $2n+2\in B$，则集合 $A\cup B$ 的元素个数最多为 （ B ）

A. 62　　B. 66　　C. 68　　D. 74

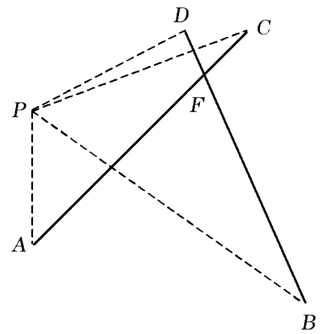
［解］ 先证$|A\cup B|\leqslant 66$，只须证$|A|\leqslant 33$，为此只须证若 A 是$\{1,2,\cdots,49\}$的任一个 34 元子集，则必存在 $n\in A$，使得 $2n+2\in A$. 证明如下：

将$\{1,2,\cdots,49\}$分成如下 33 个集合：$\{1,4\}$，$\{3,8\}$，$\{5,12\}$，…，$\{23,48\}$共 12 个；$\{2,6\}$，$\{10,22\}$，$\{14,30\}$，$\{18,38\}$共 4 个；$\{25\}$，$\{27\}$，$\{29\}$，…，$\{49\}$共 13 个；$\{26\}$，$\{34\}$，$\{42\}$，$\{46\}$共 4 个. 由于 A 是$\{1,2,\cdots,49\}$的 34 元子集，从而由抽屉原理可知上述 33 个集合中至少有一个 2 元集合中的数均属于 A，即存在 $n\in A$，使得 $2n+2\in A$.

如取 $A=\{1,3,5,\cdots,23,2,10,14,18,25,27,29,\cdots,49,26,34,42,46\}$，$B=\{2n+2\mid n\in A\}$，则 A,B 满足题设且$|A\cup B|=66$.

二、填空题(本题满分 54 分，每小题 9 分)

7. 在平面直角坐标系内，有四个定点 $A(-3,0)$，$B(1,-1)$，$C(0,3)$，$D(-1,3)$及一个动点 P，则$|PA|+|PB|+|PC|+|PD|$的最小值为 $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.



［解］ 如图，设 AC 与 BD 交于 F 点，则

$$|PA|+|PC|\geqslant|AC|=|FA|+|FC|,$$
$$|PB|+|PD|\geqslant|BD|=|FB|+|FD|,$$

因此，当动点 P 与 F 点重合时，$|PA|+|PB|+|PC|+|PD|$取到最小值$|AC|+|BD|=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

8. 在$\triangle ABC$和$\triangle AEF$中，B 是 EF 的中点，$AB=EF=1$，$BC=6$，$CA=\sqrt{33}$，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=2$，则 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角的余弦值等于 $\frac{2}{3}$.

［解］ 因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=2$，所以，$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})+\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})=2$，

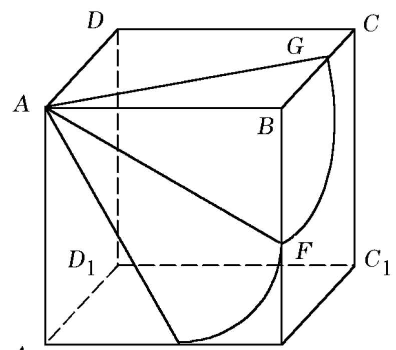
即 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}=2$.

因为 $\overrightarrow{AB}^2=1$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{33}\times1\times\frac{33+1-36}{2\times\sqrt{33}\times1}=-1$，$\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BF}$，所以

$$1+\overrightarrow{BF}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-1=2，即\ \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC}=2.$$

设 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 θ，则有$|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\theta=2$，即 $3\cos\theta=2$，所以 $\cos\theta=\frac{2}{3}$.

9. 已知正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1. 以顶点 A 为球心，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$为半径作一个球，则球面与正方体的表面相交所得到的曲线的长等于 $\frac{5\sqrt{3}\pi}{6}$.



［解］ 如图，球面与正方体的六个面都相交，所得的交线分为两类：一类在顶点 A 所在的三个面上，即面 AA_1B_1B、面 $ABCD$ 和面 AA_1D_1D 上；另一类在不过顶点 A 的三个面上，即面 BB_1C_1C、面 CC_1D_1D 和面 $A_1B_1C_1D_1$ 上.

在面 AA_1B_1B 上，交线为$\overset{\frown}{EF}$且在过球心 A 的大圆上，因为 $AE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$AA_1=1$，则$\angle A_1AE=\frac{\pi}{6}$. 同理，$\angle BAF=\frac{\pi}{6}$，所以$\angle EAF=\frac{\pi}{6}$，故 $\overset{\frown}{EF}$ 的长为$\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$. 而这样的弧共有三条.

在面 BB_1C_1C 上，交线为 $\overset{\frown}{FG}$ 且在距球心为 1 的平面与球面相交所得的小圆上，此时，小圆的圆心为 B，半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle FBG=\frac{\pi}{2}$. 所以，$\overset{\frown}{FG}$ 的长为$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$. 这样的弧也有三条.

于是，所得的曲线长为$3\times\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+3\times\frac{\sqrt{3}\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}\pi}{6}$.

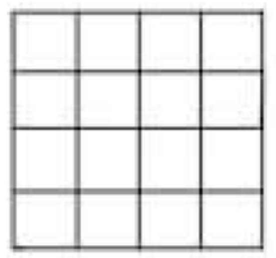
10. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差d不为0，等比数列$\{b_n\}$的公比q是小于1的正有理数. 若$a_1=d, b_1=d^2$，且$\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1+b_2+b_3}$是正整数，则$q$等于$\underline{\ \dfrac{1}{2}\ }$.

[解] 因为$\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1+b_2+b_3}=\dfrac{a_1^2+(a_1+d)^2+(a_1+2d)^2}{b_1+b_1q+b_1q^2}=\dfrac{14}{1+q+q^2}$，故由已知条件知道：$1+q+q^2$为$\dfrac{14}{m}$，其中$m$为正整数. 令$1+q+q^2=\dfrac{14}{m}$，则$q=-\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{14}{m}-1}=-\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{56-3m}{4m}}$. 由于$q$是小于1的正有理数，所以$1<\dfrac{14}{m}<3$，即$5\leqslant m\leqslant 13$且$\dfrac{56-3m}{4m}$是某个有理数的平方，由此可知$q=\dfrac{1}{2}$.

11. 已知函数$f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)-\cos(\pi x)+2}{\sqrt{x}}$ $(\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{4})$，则$f(x)$的最小值为$\underline{\ \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\ }$.

[解] 实际上，$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}\sin(\pi x-\frac{\pi}{4})+2}{\sqrt{x}}$ $(\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{4})$. 设$g(x)=\sqrt{2}\sin(\pi x-\dfrac{\pi}{4})$ $(\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{4})$，则$g(x)\geqslant 0$，$g(x)$在$[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}]$上是增函数，在$[\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}]$上是减函数，且$y=g(x)$的图像关于直线$x=\dfrac{3}{4}$对称，则对任意$x_1\in[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}]$，存在$x_2\in[\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}]$，使$g(x_2)=g(x_1)$. 于是，$f(x_1)=\dfrac{g(x_1)+2}{\sqrt{x_1}}=\dfrac{g(x_2)+2}{\sqrt{x_1}}\geqslant\dfrac{g(x_2)+2}{\sqrt{x_2}}=f(x_2)$. 而$f(x)$在$\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}\right]$上是减函数，所以，$f(x)\geqslant f(\dfrac{5}{4})=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，即$f(x)$在$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{4}\right]$上的最小值是$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

12. 将2个a和2个b共4个字母填在如图所示的16个小方格内，每个小方格内至多填1个字母，若使相同字母既不同行也不同列，则不同的填法共有$\underline{3960}$种(用数字作答).



[解] 使2个a既不同行也不同列的填法有$C_4^2A_4^2=72$种，同样，使2个b既不同行也不同列的填法也有$C_4^2A_4^2=72$种，故由乘法原理，这样的填法共有72^2种，其中不符合要求的有两种情况：2个a所在的方格内都填有b的情况有72种；2个a所在的方格内仅有1个方格内填有b的情况有$C_{16}^1A_9^2=16\times 72$种. 所以，符合题设条件的填法共有$72^2-72-16\times 72=3960$种.

三、解答题(本题满分60分，每小题20分)

13. 设$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(n+1-k)}$，求证：当正整数$n\geqslant 2$时，$a_{n+1}<a_n$.

[证] 由于$\dfrac{1}{k(n+1-k)}=\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{n+1-k}\right)$，因此$a_n=\dfrac{2}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$

于是，对任意的正整数$n\geqslant 2$，有

$$\frac{1}{2}(a_n-a_{n+1})=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\right)>0\text{，即 }a_{n+1}<a_n.$$

14. 已知过点$(0,1)$的直线l与曲线C：$y=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$交于两个不同点M和N. 求曲线C在点M、N处的切线的交点轨迹.

[解] 设点M、N的坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2)，曲线C在点M、N处的切线分别为l_1,l_2，其交点P的坐标为(x_p,y_p). 若直线l的斜率为k，则l的方程为$y=kx+1$.

由方程组$\begin{cases} y=x+\dfrac{1}{x}, \\ y=kx+1, \end{cases}$消去 y，得 $x+\dfrac{1}{x}=kx+1$，即$(k-1)x^2+x-1=0$. 由题意知，该方程在$(0,+\infty)$上有两个相异的实根 x_1, x_2，故 $k\neq 1$，且

$$\Delta = 1+4(k-1)>0, \qquad (1)$$

$$x_1+x_2=\frac{1}{1-k}>0, \qquad (2)$$

$$x_1x_2=\frac{1}{1-k}>0, \qquad (3)$$

由此解得$\dfrac{3}{4}<k<1$.

对 $y=x+\dfrac{1}{x}$求导，得 $y'=1-\dfrac{1}{x^2}$，则 $y'|_{x=x_1}=1-\dfrac{1}{x_1^2}$，$y'|_{x=x_2}=1-\dfrac{1}{x_2^2}$，于是，直线 l_1 的方程为

$y-y_1=\left(1-\dfrac{1}{x_1^2}\right)(x-x_1)$，即 $y-\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)=\left(1-\dfrac{1}{x_1^2}\right)(x-x_1)$，化简后得直线 l_1 的方程为：

$$y=\left(1-\frac{1}{x_1^2}\right)x+\frac{2}{x_1}. \qquad (4)$$

同理可求得直线 l_2 的方程为

$$y=\left(1-\frac{1}{x_2^2}\right)x+\frac{2}{x_2}. \qquad (5)$$

(4)－(5)得$\left(\dfrac{1}{x_2^2}-\dfrac{1}{x_1^2}\right)x_p+\dfrac{2}{x_1}-\dfrac{2}{x_2}=0$. 因为 $x_1\neq x_2$，故有

$$x_p=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}. \qquad (6)$$

将(2)(3)两式代入(6)式得 $x_p=2$.

(4)＋(5)得

$$2y_p=\left(2-\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\right)\right)x_p+2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right), \qquad (7)$$

其中$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=1$,

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2x_2^2}=\left(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right)^2-\frac{2}{x_1x_2}=1-2(1-k)=2k-1,$$

代入(7)式得：$2y_p=(3-2k)x_p+2$. 而 $x_p=2$，得 $y_p=4-2k$. 又由$\dfrac{3}{4}<k<1$ 得 $2<y_p<\dfrac{5}{2}$，即点 P 的轨迹为$(2,2)$，$(2,\dfrac{5}{2})$两点间的线段(不含端点).

15. 设函数 $f(x)$对所有的实数 x 都满足 $f(x+2\pi)=f(x)$，求证：存在 4 个函数 $f_i(x)(i=1,2,3,4)$满足：

(1)对 $i=1,2,3,4$，$f_i(x)$是偶函数，且对任意的实数 x，有 $f_i(x+\pi)=f_i(x)$；

(2)对任意的实数 x，有 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)\cos x+f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$.

［证］ 记 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，$h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，则 $f(x)=g(x)+h(x)$，且 $g(x)$是偶函数，$h(x)$是奇函数，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$g(x+2\pi)=g(x)$，$h(x+2\pi)=h(x)$

令

$$f_1(x)=\frac{g(x)+g(x+\pi)}{2},$$

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-g(x+\pi)}{2\cos x}, & x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{h(x)-h(x+\pi)}{2\sin x}, & x\neq k\pi,\\ 0, & x=k\pi,\end{cases}$$

$$f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{h(x)+h(x+\pi)}{2\sin 2x}, & x\neq \dfrac{k\pi}{2},\\ 0, & x=\dfrac{k\pi}{2},\end{cases}$$

其中 k 为任意整数.

容易验证 $f_i(x),i=1,2,3,4$ 是偶函数，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f_i(x+\pi)=f_i(x),i=1,2,3,4$.

下证对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有

$$f_1(x)+f_2(x)\cos x=g(x).$$

当 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，显然成立；

当 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，因为 $f_1(x)+f_2(x)\cos x=f_1(x)=\frac{g(x)+g(x+\pi)}{2}$，而

$$g(x+\pi)=g(k\pi+\frac{3\pi}{2})=g(k\pi+\frac{3\pi}{2}-2(k+1)\pi)=g(-k\pi-\frac{\pi}{2})=g(k\pi+\frac{\pi}{2})=g(x),$$

故对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f_1(x)+f_2(x)\cos x=g(x)$.

下证对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有

$$f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x=h(x).$$

当 $x\neq\frac{k\pi}{2}$ 时，显然成立；

当 $x=k\pi$ 时，

$$h(x)=h(k\pi)=h(k\pi-2k\pi)=h(-k\pi)=-h(k\pi)，所以\ h(x)=h(k\pi)=0,$$

而此时 $f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x=0$，故

$$h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x;$$

当 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\begin{aligned}h(x+\pi)&=h(k\pi+\frac{3\pi}{2})=h(k\pi+\frac{3\pi}{2}-2(k+1)\pi)\\&=h(-k\pi-\frac{\pi}{2})=-h(k\pi+\frac{\pi}{2})=-h(x).\end{aligned}$$

故 $f_3(x)\sin x=\frac{h(x)-h(x+\pi)}{2}=h(x)$，又 $f_4(x)\sin 2x=0$，从而有 $h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$.

于是，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，我们有

$$h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x.$$

综上所述，结论得证.