首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答

（数学类，2009）

考试形式：闭卷　　考试时间：120 分钟　　满分：100 分.

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满　分	15	20	15	10	10	15	15	100
得　分								

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

专业：　年级：　所在院校：　身份证号：　姓名：

密　封　线

得　分	
评阅人	

一、（15 分）求经过三平行直线 $L_1: x=y=z$，$L_2: x-1=y=z+1$，$L_3: x=y+1=z-1$ 的圆柱面的方程.

解： 先求圆柱面的轴 L_0 的方程. 由已知条件易知，圆柱面母线的方向是 $\vec{n}=(1,1,1)$，且圆柱面经过点 $O(0,0,0)$，过点 $O(0,0,0)$ 且垂直于 $\vec{n}=(1,1,1)$ 的平面 π 的方程为：$x+y+z=0$. ……………………………（3 分)

π 与三已知直线的交点分别为 $O(0,0,0), P(1,0,-1), Q(0,-1,1)$ ………… （5 分)

圆柱面的轴 L_0 是到这三点等距离的点的轨迹，即

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z+1)^2 \\ x^2+y^2+z^2=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases}, \quad \text{…………………………………………（9 分)}$$

将 L_0 的方程改为标准方程

$$x-1=y+1=z.$$

圆柱面的半径即为平行直线 $x=y=z$ 和 $x-1=y+1=z$ 之间的距离. $P_0(1,-1,0)$

为 L_0 上的点. ………………………………………………………………… （12 分)

对圆柱面上任意一点 $S(x,y,z)$， 有 $\dfrac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0S}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0O}|}{|\vec{n}|}$， 即

$$(-y+z-1)^2+(x-z-1)^2+(-x+y+2)^2=6,$$

所以，所求圆柱面的方程为：

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-3x+6y=0.$$ ………………. （15 分)

得　分	
评阅人	

二、（20 分）设 $C^{n\times n}$ 是 $n\times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域 C 上的线性空间， $F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$.

（1）假设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，若 $AF=FA$，证明：

$A=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$；

（2）求 $C^{n\times n}$ 的子空间 $C(F)=\left\{X\in C^{n\times n}\mid FX=XF\right\}$ 的维数.

（1）的证明:记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， $M=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$.要证明 $M=A$，只需证明 A 与 M 的各个列向量对应相等即可.若以 e_i 记第 i 个基本单位列向量.于是，只需证明：对每个 i， $Me_i=Ae_i(=\alpha_i)$. ……………………… （2 分)

若记 $\beta=(-a_n,-a_{n-1},\cdots,-a_1)^T$， 则 $F=(e_2,e_3,\cdots,e_n,\beta)$.注意到，

$Fe_1=e_2,F^2e_1=Fe_2=e_3,\cdots,F^{n-1}e_1=F(F^{n-2}e_1)=Fe_{n-1}=e_n$ （*） ….. （6 分)

由

$$\begin{aligned} Me_1&=(a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E)e_1\\ &=a_{n1}F^{n-1}e_1+a_{n-11}F^{n-2}e_1+\cdots+a_{21}Fe_1+a_{11}Ee_1\\ &=a_{n1}e_n+a_{n-11}e_{n-1}+\cdots+a_{21}e_2+a_{11}e_1\\ &=\alpha_1=Ae_1 \end{aligned}$$ ……………………………………….(10分）

知 $Me_2=MFe_1=FMe_1=FAe_1=AFe_1=Ae_2$

$$Me_3 = MF^2e_1 = F^2Me_1 = F^2Ae_1 = AF^2e_1 = Ae_3$$

……………

$$Me_n = MF^{n-1}e_1 = F^{n-1}Me_1 = F^{n-1}Ae_1 = AF^{n-1}e_1 = Ae_n$$

所以，$M = A$. ………………………….. （14 分)

（2）解: 由（1），$C(F) = span\{E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}\}$，………… （16 分)

设 $x_0E + x_1F + x_2F^2 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1} = O$，等式两边同右乘 e_1，利用（*）得

$$\theta = Oe_1 = (x_0E + x_1F + x_2F^2 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1})e_1$$

$$= x_0Ee_1 + x_1Fe_1 + x_2F^2e_1 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1}e_1$$

$$= x_0e_1 + x_1e_2 + x_2e_3 + \cdots + x_{n-1}e_n$$ ....(18分）

因 $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$ 线性无关，故，$x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ …………（19 分)

所以，$E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}$ 线性无关.因此，$E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}$ 是 $C(F)$ 的基，特别地，

$\dim C(F) = n$. ……………………………（20 分)

得　分	
评阅人	

三、（15 分）假设 V 是复数域 C 上 n 维线性空间（$n > 0$），f, g 是 V 上的线性变换.如果 $fg - gf = f$，证明：f 的特征值都是 0，且 f, g 有公共特征向量.

证明： 假设 λ_0 是 f 的特征值，W 是相应的特征子空间，即 $W = \{\eta \in V \mid f(\eta) = \lambda_0\eta\}$.于是，$W$ 在 f 下是不变的. …………………………（1 分)

下面先证明，λ_0 =0.任取非零 $\eta \in W$，记 m 为使得 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^m(\eta)$ 线性相关的最小的非负整数，于是，当 $0 \le i \le m-1$ 时，$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^i(\eta)$ 线性无关…..（2 分)

$0 \le i \le m-1$ 时令 $W_i = span\{\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^{i-1}(\eta)\}$,其中，$W_0 = \{\theta\}$.因此，$\dim W_i = i$（$1 \le i \le m$），并且，$W_m = W_{m+1} = W_{m+2} = \cdots$. 显然，$g(W_i) \subseteq W_{i+1}$，特别地，$W_m$ 在 g 下是不变的. ……………………………（4 分)

下面证明，W_m 在 f 下也是不变的.事实上，由 $f(\eta) = \lambda_0\eta$，知

$$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = \lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta$$ …………（5 分)

$$\begin{aligned} fg^2(\eta) &= gfg(\eta) + fg(\eta) \\ &= g(\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta) + (\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta) \\ &= \lambda_0 g^2(\eta) + 2\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta \end{aligned}$$ ....(6分）

根据

$$\begin{aligned} fg^k(\eta) &= gfg^{k-1}(\eta) + fg^{k-1}(\eta) \\ &= g(fg^{k-1})(\eta) + fg^{k-1}(\eta) \end{aligned}$$

用归纳法不难证明，$fg^k(\eta)$ 一定可以表示成 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^k(\eta)$ 的线性组合，且表示式中 $g^k(\eta)$ 前的系数为 λ_0. ……………………………………（8分)

因此，W_m 在 f 下也是不变的，f 在 W_m 上的限制在基 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^{m-1}(\eta)$ 下的矩阵是上三角矩阵，且对角线元素都是 λ_0，因而，这一限制的迹为 $m\lambda_0$. …..（10 分)

由于 $fg - gf = f$ 在 W_m 上仍然成立，而 $fg - gf$ 的迹一定为零，故 $m\lambda_0 = 0$，即 λ_0 =0. ……………………………..（12 分)

任取 $\eta \in W$，由于 $f(\eta) = \theta$，$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = g(\theta) + f(\eta) = \theta$，所以，$g(\eta) \in W$.因此，W 在 g 下是不变的.从而，在 W 中存在 g 的特征向量，这也是 f, g 的公共特征向量. …………………………………（15 分)

得　分	
评阅人	

四、（10 分）设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛，并在 $[a,b]$ 上满足 $|f_n'(x)| \le M$.（1）证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；（2）设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，问 $f(x)$ 是否一定在 $[a,b]$ 上处处可导,为什么？

证明：（1）$\forall \varepsilon > 0$，将区间 $[a,b]$ K 等分，分点为 $x_j = a + \dfrac{j(b-a)}{K}$, $j = 0,1,2,\cdots,K$，使得 $\dfrac{b-a}{K} < \varepsilon$. 由于 $\{f_n(x)\}$ 在有限个点 $\{x_j\}$, $j = 0,1,2,\cdots,K$ 上收敛,因此 $\exists N$，$\forall m > n > N$，使得 $|f_m(x_j) - f_n(x_j)| < \varepsilon$ 对每个 $j = 0,1,2,\cdots,K$ 成立. …………………………..（3 分)

于是 $\forall x \in [a,b]$，设 $x \in [x_j, x_{j+1}]$，则

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_n(x)|,$$

专业：　　年级：　　所在院校：　　身份证号：　　姓名：

密　　封　　线

$$=\left|f_m'(\xi)(x-x_j)\right|+\left|f_m(x_j)-f_n(x_j)\right|+\left|f_n'(\eta)(x-x_j)\right|<\left(2M+1\right)\varepsilon .$$ …（5 分）

（2）不一定. ……………………………（6 分）

令 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$，则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上不能保证处处可导.（10 分）

得　分	
评阅人	

五、（10 分）设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\dfrac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt$， 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 发散.

解： $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=I_1+I_2$$ …….（3 分）

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt<n^3\int_0^{\frac{\pi}{n}}tdt=\frac{\pi^2n}{2},$$ ………………………（5 分）

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt<\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\left(\frac{\pi}{2t}\right)^3dt=-\frac{\pi^3}{8}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}d\left(\frac{1}{t}\right)$$ ………..（7 分）

$$=\frac{\pi^3}{8}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right)<\frac{\pi^2n}{8}.$$ …………..（8 分）

因此 $\dfrac{1}{a_n}>\dfrac{1}{\pi^2n}$，由此得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 发散. ……………………（10 分）

得　分	
评阅人	

六、（15 分） $f(x,y)$ 是 $\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\right\}$ 上二次连续可微函数，满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$，计算积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy.$$

解： 采用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$I=\int_0^1dr\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)rd\theta=\int_0^1dr\int_{x^2+y^2=r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx\right)$$ …..（6 分）

$$=\int_0^1dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_0^1dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(x^2y^2\right)dxdy$$ …….（10 分）

$$=\int_0^1 dr\int_0^r \rho^5 d\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{168}.$$ ……………….(15 分)

得　分	
评阅人	

七、（15 分））假设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,\ f(0))$，与点 $B(1,\ f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,\ f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,\ 1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足 *Lagrange* 中值定理的条件，故存在 $\xi_1\in(0,\ c)$，使 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}$. …………………………………………………………………（4 分)

由于 C 在弦 AB 上，故有

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0).$$ ……………………….……….……..（7 分)

从而 $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)$. ……………………………………...………...………..（8 分)

同理可证，存在 $\xi_2\in(c,\ 1)$，使 $f'(\xi_2)=f(1)-f(0)$. ………………….……..（11 分)

由 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，知在 $[\xi_1,\ \xi_2]$ 上 $f'(x)$ 满足 *Rolle* 定理的条件，所以存在 $\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)\subset(0,\ 1)$，使 $f''(\xi)=0$. ……………………………………….…….…….（15 分)