2007年全国高中数学联合竞赛加试

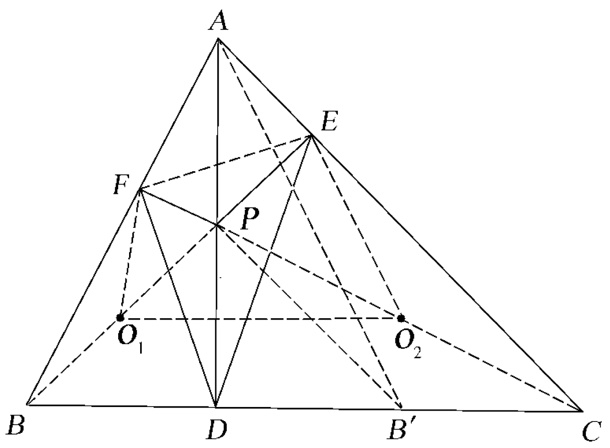
试题参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分；
2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参照本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不要再增加其他中间档次.

一、(本题满分**50**分)

如图，在锐角$\triangle ABC$中，$AB<AC$，AD是边BC上的高，P是线段AD内一点. 过P作$PE\perp AC$，垂足为E，作$PF\perp AB$，垂足为F. O_1、O_2分别是$\triangle BDF$、$\triangle CDE$的外心. 求证：O_1、O_2、E、F四点共圆的充要条件为P是$\triangle ABC$的垂心.



[证]　连结BP、CP、O_1O_2、EO_2、EF、FO_1.

因为$PD\perp BC$，$PF\perp AB$，故B、D、P、F四点共圆，且BP为该圆的直径. 又因为O_1是$\triangle BDF$的外心，故O_1在BP上且是BP的中点.

同理可证，C、D、P、E四点共圆，且O_2是CP的中点.

综合以上知，$O_1O_2 /\!/ BC$，所以$\angle PO_2O_1=\angle PCB$.

因为$AF\cdot AB=AP\cdot AD=AE\cdot AC$，所以$B$、$C$、$E$、$F$四点共圆.

充分性：

设P是$\triangle ABC$的垂心，由于$PE\perp AC$，$PF\perp AB$，所以，B、O_1、P、E四点共线，C、O_2、P、F四点共线，$\angle FO_2O_1=\angle FCB=\angle FEB=\angle FEO_1$，故$O_1$、$O_2$、$E$、$F$四点共圆.

必要性：

设O_1、O_2、E、F四点共圆，故$\angle O_1O_2E+\angle EFO_1=180^\circ$.

注意到$\angle PO_2O_1=\angle PCB=\angle ACB-\angle ACP$，又因为$O_2$是直角$\triangle CEP$的斜边中

点，也就是$\triangle CEP$的外心，所以$\angle PO_2E=2\angle ACP$.

因为O_1是直角$\triangle BFP$的斜边中点，也就是$\triangle BFP$的外心，从而

$$\angle PFO_1=90^\circ-\angle BFO_1=90^\circ-\angle ABP.$$

因为B、C、E、F四点共圆，所以$\angle AFE=\angle ACB$，$\angle PFE=90^\circ-\angle ACB$.

于是，由$\angle O_1O_2E+\angle EFO_1=180^\circ$得

$$(\angle ACB-\angle ACP)+2\angle ACP+(90^\circ-\angle ABP)+(90^\circ-\angle ACB)=180^\circ,$$

即$\angle ABP=\angle ACP$.

又因为$AB<AC$，$AD\perp BC$，故$BD<CD$.

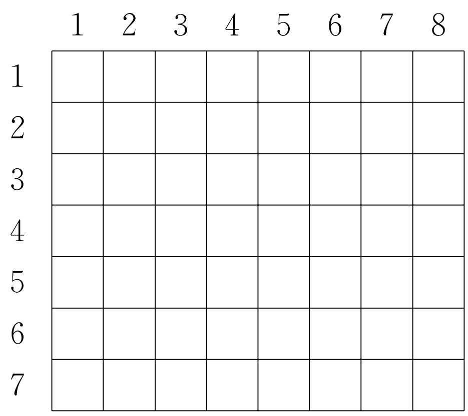
设B'是点B关于直线AD的对称点，则B'在线段DC上且$B'D=BD$. 连结AB'、PB'. 由对称性，有$\angle AB'P=\angle ABP$，从而$\angle AB'P=\angle ACP$，所以A、P、B'、C四点共圆. 由此可知，$\angle PB'B=\angle CAP=90^\circ-\angle ACB$.

因为$\angle PBC=\angle PB'B$，故$\angle PBC+\angle ACB=(90^\circ-\angle ACB)+\angle ACB=90^\circ$，故直线$BP$和$AC$垂直.

由题设P在边BC上的高AD上，所以P是$\triangle ABC$的垂心.

二、(本题满分 **50** 分)

如图，在7×8的长方形棋盘的每个小方格的中心点各放一个棋子. 如果两个棋子所在的小方格共边或共顶点，那么称这两个棋子相连. 现从这56个棋子中取出一些，使得棋盘上剩下的棋子，没有五个在一条直线(横、竖、斜方向)上依次相连. 问最少取出多少个棋子才可能满足要求？并说明理由.



[解]　最少要取出11个棋子，才可能满足要求. 其原因如下：

如果一个方格在第i行第j列，则记这个方格为(i,j).

第一步证明若任取10个棋子，则余下的棋子必有一个五子连珠，即五个棋子在一条直线(横、竖、斜方向)上依次相连. 用反证法. 假设可取出10个棋子，使余下的棋子没有一个五子连珠. 如图1，在每一行的前五格中必须各取出一个棋子，后三列的前五格中也必须各取出一个棋子. 这样，10个被取出的棋子不会分布在右下角的阴影部分. 同理，由对称性，也不会分布在其它角上的阴影部分. 第1,2行必在每行取出一个，且只能分布在$(1,4)$,$(1,5)$,$(2,4)$,$(2,5)$这些方格. 同理，$(6,4)$,$(6,5)$,$(7,4)$,$(7,5)$这些方格上至少要取出2个棋子. 在第1,2,3列，每列至少要取出一个棋子，分布在$(3,1)$,$(3,2)$,$(3,3)$,

(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)所在区域，同理(3,6),(3,7),(3,8),(4,6),(4,7),(4,8),(5,6),(5,7),(5,8)所在区域内至少要取出 3 个棋子. 这样，在这些区域内至少已取出 10 个棋子. 因此，在中心阴影区域内不能取出棋子. 由于①,②,③,④这四个棋子至多被取出 2 个，从而，从斜的方向看必有五子连珠了. 矛盾!

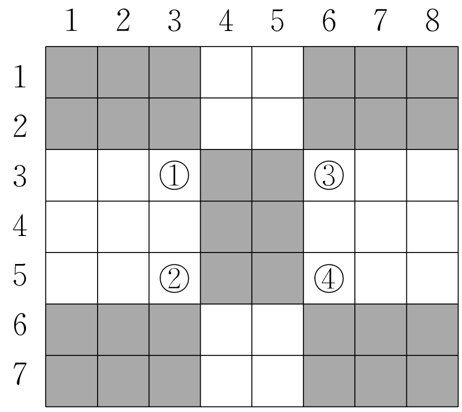


图 1

第二步构造一种取法，共取走 11 个棋子，余下的棋子没有五子连珠. 如图 2,只要取出有标号位置的棋子，则余下的棋子不可能五子连珠.

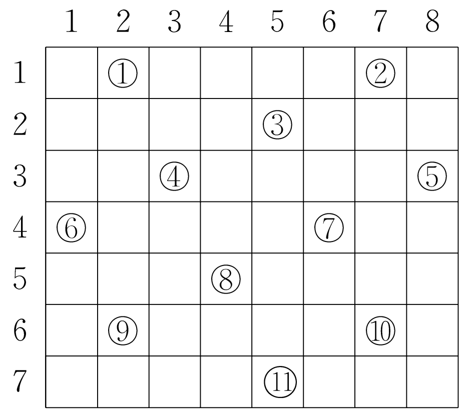


图 2

综上所述，最少取出 11 个棋子，才可能使得余下的棋子没有五子连珠.

三、(本题满分 **50** 分)

设集合 $P=\{1,2,3,4,5\}$. 对任意 $k\in P$ 和正整数 m，记 $f(m,k)=\sum_{i=1}^{5}\left[m\sqrt{\frac{k+1}{i+1}}\right]$，其中 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数.

求证：对任意正整数 n，存在 $k\in P$ 和正整数 m，使得 $f(m,k)=n$.

[证]　定义集合 $A=\{m\sqrt{k+1}\mid m\in N^*,\ k\in P\}$，其中 N^* 为正整数集.

由于对任意 $k,i\in P$ 且 $k\neq i$，$\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$ 是无理数，则对任意的 $k_1,k_2\in P$ 和正整

数 m_1，m_2，

$$m_1\sqrt{k_1+1}=m_2\sqrt{k_2+1} \text{ 当且仅当 } m_1=m_2,\ k_1=k_2.$$

注意到 A 是一个无穷集，现将 A 中的元素按从小到大的顺序排成一个无穷数列. 对于任意的正整数 n，设此数列中第 n 项为 $m\sqrt{k+1}$. 下面确定 n 与 m,k 间的关系.

若 $m_1\sqrt{i+1}\leqslant m\sqrt{k+1}$，则 $m_1\leqslant m\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$.

由 m_1 是正整数知，对 $i=1,2,3,4,5$，满足这个条件的 m_1 的个数为 $\left[m\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}\right]$.

从而

$$n=\sum_{i=1}^{5}\left[m\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}\right]=f(m,k).$$

因此对任意 $n\in N^*$，存在 $m\in N^*$，$k\in P$，使得

$$f(m,k)=n.$$